PART2 反復試行の確率

要点 ① 反復試行の確率

同じ条件のもとで，同じ試行を繰り返し行うとき，各回の試行は　　　　である。このような独立な試行の繰り返しをまとめて「　　　　　　　」という。

例 当たりくじ 4 本を含む 10 本のくじがある。引いたくじはもとに戻すとして，このくじを 1 本ずつ続けて 3 本を引くとき，1 本だけ当たる確率を求める。

1 本だけ当たる事象は，次の [1]，[2]，[3] のいずれか。

[1]　1 本目が当たり，2 本目がはずれ，3 本目がはずれ

これが起こる確率は $\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{18}{125}$

[2]　1 本目がはずれ，2 本目が当たり，3 本目がはずれ

これが起こる確率は $\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{18}{125}$

[3]　1 本目がはずれ，2 本目がはずれ，3 本目が当たり

これが起こる確率は $\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{18}{125}$

[1]，[2]，[3] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}=\frac{18}{125}\times\quad=\frac{54}{125}$$

である。

[1]，[2]，[3] が起こる確率はすべて「当たりが 1 本，はずれが 2 本」の確率であり，その出る順番によらず等しく $\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=$　　　　　　　である。

この確率になるものは，[1]，[2]，[3] の 3 通りであり，この 3 通りは

「3 回の試行のうち，当たりが出る 1 回を選ぶ」方法の総数　　通り

に等しい。当たりが出ない残り 2 回は，はずれである。

よって，求める確率は

と表される。

反復試行の確率について，次のことが成り立つ。

反復試行の確率

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。

この試行を n 回繰り返し行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r}$$

※一般に，正の数 a に関して，$a^0=1$ と定める。また，${}_n\mathrm{C}_0=1$，${}_n\mathrm{C}_n=1$ であるから

上記の式においては

$r=0$ のとき　${}_n\mathrm{C}_0\, p^0\,(1-p)^n=(1-p)^n$

$r=n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_n\, p^n\,(1-p)^0=p^n$

である。

例　赤玉4個，白玉2個が入っている袋から玉を1個取り出し，色を調べてからもとに戻す試行を5回続けて行うとき，赤玉をちょうど2回取り出す確率を求める。

1回の試行で赤玉が出る確率は $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，白玉を取り出す確率は　　　$=\dfrac{1}{3}$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=10\times\frac{2^2\times1^3}{3^5}=\frac{40}{243}$$

2 1個のさいころを続けて4回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 1の目がちょうど2回出る確率

(2) 5以上の目がちょうど3回出る確率

(3) 偶数の目が2回以上出る確率

Point Pickup

反復試行の確率

同じ条件のもとで，同じ試行を n 回繰り返し行う反復試行において，ある事象 A がちょうど r 回起こるとき

① 事象 A が起こる n 回中 r 回の決め方の総数は　　通りである。

② 1回の試行において事象 A が起こる確率が p のとき，事象 A が起こらない確率は $1-p$ であり，①のそれぞれが起こる確率はすべて等しく　　　　　である。

③ ①，②より，ある事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r}$$

第 5 講 PART2 確認問題

1 1 個のさいころを続けて 3 回投げるとき，6 の目がちょうど 1 回出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

2 1 個のさいころを続けて 4 回投げるとき，1 または 2 の目がちょうど 2 回出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

3 1 個のさいころを続けて 5 回投げるとき，偶数の目が 4 回以上出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

PART2 反復試行の確率

2 1個のさいころを続けて4回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 1の目がちょうど2回出る確率

(2) 5以上の目がちょうど3回出る確率

(3) 偶数の目が2回以上出る確率

[解答]

(1) さいころを1回投げるとき

1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，1の目が出ない確率は $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

よって，求める確率は ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216}$

(2) さいころを1回投げるとき

5以上の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，4以下の目が出る確率は $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

よって，求める確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(3) さいころを1回投げるとき

偶数の目が出る確率は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，奇数の目が出る確率は $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

4回投げて偶数の目が2回以上出るのは以下のとき。

[1] 偶数の目がちょうど2回出る

これが起こる確率は ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$

[2] 偶数の目がちょうど3回出る

これが起こる確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$

[3] 偶数の目が4回出る

これが起こる確率は ${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

[1]，[2]，[3] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

（別解）

4 回投げて偶数の目が 2 回以上出るという事象は，偶数の目が 1 回以下，すなわち偶数の目が 1 回または 0 回だけ出ることの余事象である。

よって，求める確率は

$$1-\left\{{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}=1-\left\{{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}$$

$$=1-\left(\frac{4}{16}+\frac{1}{16}\right)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

第5講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：25，ウエ：72

[解説]

さいころを1回投げるとき，6の目が出る確率は，

$\frac{1}{6}$ である。

3回投げるとき，6の目がちょうど1回出る確率は，

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}=\mathbf{\frac{25}{72}}$$ [A]

[A]　反復試行の確率
1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返し行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は，
$${}_nC_r\,p^r\,(1-p)^{n-r}$$

2

[正解] オ：8，カキ：27

[解説]

さいころを1回投げるとき，1または2の目が出る確率は，$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。

4回投げるとき，1または2の目がちょうど2回出る確率は，

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\mathbf{\frac{8}{27}}$$ [B]

[B]　反復試行の確率
$${}_nC_r\,p^r\,(1-p)^{n-r}$$

3 **[正解]** **ク**：3，**ケコ**：16

[解説]

さいころを 1 回投げるとき，偶数の目が出る確率は，

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ である。

5 回投げるとき，偶数の目が 4 回以上出るのは，次の〔1〕，〔2〕のいずれかである。 [C]

〔1〕偶数の目がちょうど 4 回出る確率は，

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=5\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

〔2〕偶数の目がちょうど 5 回出る確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

〔1〕，〔2〕は互いに排反であるから，求める確率は，

[D]

$$\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{6}{32}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}$$

［C］ 排反な事象に分けて，それぞれ確率を求める。

［D］ 〔1〕と〔2〕の事象は互いに排反なので，それぞれの確率を加える。（確率の加法定理）